Μάθημα 13ο

15/04/2019

Χώρος Φάσεων

$\forall t \in [0, +\infty)$ μπορούμε να έχουμε ένα $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

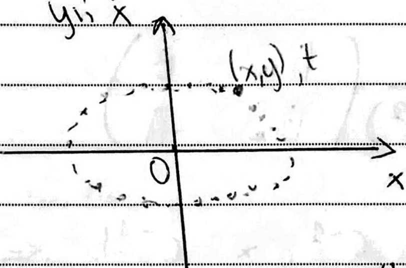
Αυτόνομο Σύστημα: $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$

π.χ. $\ddot{x} + \overset{=\omega^2}{k}x = 0$, $x(t)$, ΣΔΕ $2^{ης}$ τ., γρ. ομ. (αυτόνομη ΔΕ)

$\ddot{x} + kx = a\sin t = af(t)$, όχι αυτόνομη ΔΕ ή πρόβλημα

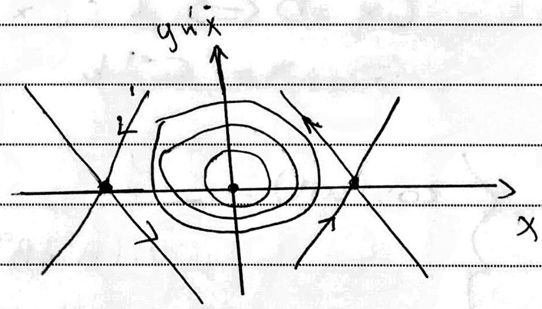
Λύση: $\ddot{x} = f(x, \dot{x}) \iff \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x,y) \end{cases}$: Σύστημα ΔΕ $1^{ης}$ τάξης η καθε μία

Χώρος φάσεων:



Βλέπω τη κίνηση κάνει το Υ.Σ. μου (αλλά σε άλλο χώρο)

Χώρος φάσεων για εκκρεμές:

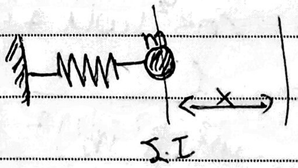


Ο απλός αρμονικός Ταλαντωτής

$m\ddot{x} = F(x) \iff m\ddot{x} = -kx \iff \ddot{x} = -\overbrace{\frac{k}{m}}^{\omega^2} x \iff \ddot{x} = -\omega^2 x \iff$

$\iff \boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}$, $\omega^2 > 0$

$\iff \begin{cases} \dot{x} = \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dot{y} = \dfrac{dy}{dt} = -\omega^2 x \end{cases}$



Γνωρίζουμε ότι η λύση του συστήματος είναι:

$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$

$\dot{x}(t) = y(t) = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$

Αν βρω τα Σ.Ι. μπορώ να βρω τον χώρο των φάσεων και από εκεί να καταλάβω τι κίνηση κάνει το Υ.Σ. χωρίς να λύσω το σύστημα

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B\omega & -A\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Αν $C = \begin{pmatrix} A & B \\ B\omega & -A\omega \end{pmatrix}$ τότε $C^{-1} = -\dfrac{1}{\omega(A^2+B^2)} \begin{pmatrix} -A\omega & -B \\ -B\omega & +A \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{\omega(A^2+B^2)} \begin{pmatrix} A\omega & B \\ B\omega & -A \end{pmatrix}$$

Ισχύει: $Cx = b \Longleftrightarrow C^{-1}Cx = C^{-1}b \Longleftrightarrow Ix = C^{-1}b \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow x = C^{-1}b$

Άρα:
$$\begin{cases} \cos(\omega t) = \dfrac{1}{\omega(A^2+B^2)}\left[(A\omega)x + By\right] \\[2ex] \sin(\omega t) = \dfrac{1}{\omega(A^2+B^2)}\left[(B\omega)x - Ay\right] \end{cases}$$

Είναι: $1 = \cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) =$
$$= \frac{1}{\omega^2(A^2+B^2)^2}\left\{\left[(A\omega)x + By\right]^2 + \left[(B\omega)x - Ay\right]^2\right\}$$

$$\Longleftrightarrow \left[(A\omega)x + By\right]^2 + \left[(B\omega)x - Ay\right]^2 = \omega^2(A^2+B^2)^2 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (A^2+B^2)\omega^2x^2 + (A^2+B^2)y^2 = \omega^2(A^2+B^2)^2 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \omega^2x^2 + y^2 = \omega^2(A^2+B^2) \Longleftrightarrow$$

$$\boxed{x^2 + \frac{1}{\omega^2}y^2 = (A^2+B^2)} \quad \text{ή} \quad \boxed{x^2 + \frac{1}{\omega^2}(\dot{x})^2 = (A^2+B^2)}$$

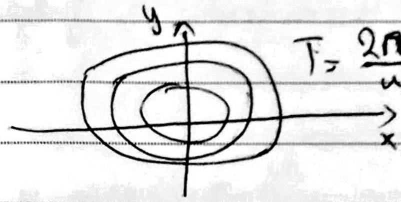
περιγράφει ελλείψεις

Παρατήρηση: Έστω Α.Σ. $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = \dot{x}(0) = y_0 \end{cases}$

Άρα: $\underbrace{x^2 + \frac{1}{\omega^2}(\dot{x})^2} = x_0^2 + \frac{1}{\omega^2}(y_0)^2 = C_1$, όπου C_1: σταθερά

ΔΘΣ. η ποσότητα αυτή διατηρείται.

Διάγραμμα φάσης θα είναι ελλείψεις:
(Ανάλογα με την Α.Σ. από την οποία ξεκινάω θα κινηθώ πάνω σε μία έλλειψη)



$T = \frac{2\pi}{\omega}$

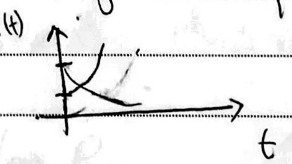
ευσταθείς τροχιές γύρω από το Σ.Ι.

Έστω τώρα ότι έχω: $\ddot{x} - \omega^2 x = 0$ (1)

Μου δίνει ασταθείς τροχιές

Λύση της ΔΕ: $x(t) = c_1 \cdot e^{-\omega t} + c_2 e^{\omega t}$

Με κατάλληλες αρχ. συνθ. ή σε πηγαίνει ασυμπτωτικά στο μηδέν ή σε πηγαίνει στο άπειρο.

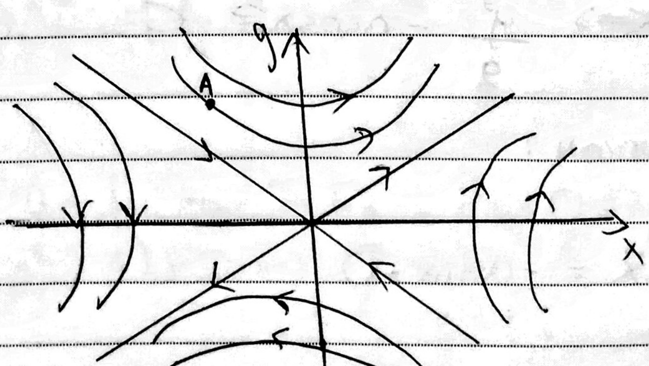


Γράφω την (1) ως σύστημα:

$$(1): \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \omega^2 x \end{cases} \iff \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\omega^2 x}{y} \iff \frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{y} \iff$$

$$\iff y\,dy - \omega^2 x\,dx = 0 \iff y^2 - \omega^2 x^2 = C_1 \iff \boxed{y^2 = \omega^2 x^2 + C_1}$$

Μου δίνει υπερβολές.



Σαγματικό σημείο
(είναι σάγμα)

Άρα: α) Α ασταθές Σ.Ι.
β) Ασύμπτωτες : $y = \pm \omega x$
γ) Δεν μιλάμε για περιοδική κίνηση.

Τι σημαίνει ότι το ΥΣ βρίσκεται στη θέση Α, και τι κίνηση θα κάνει;

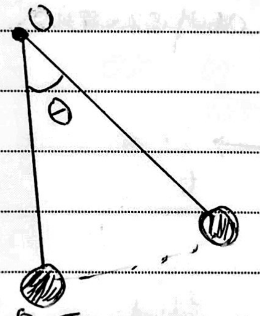
Τι σημαίνει το ζευγάρι (x,y) $\Rightarrow$ x : θέση, y : ταχύτητα $\Rightarrow$ Άρα το Α σημαίνει ξεκινάω από τη θέση x με ταχύτητα y.

Η ταχύτητα y επιβραδύνεται, πλησιάζει το ΣΙ, μπορώ να το φτάσω αν είναι πάνω στις ασύμπτωτες, και μετά (πάνω στις υπερβολές) θα φύγει προς το άπειρο.

Πάνω στις ασύμπτωτες ή θα φύγει προς τα − ή προς τα + ανάλογα πού πάω.

Όλα τα Σ.Ι. ανήκουν στον άξονα των x

Απλό εκκρεμές:



Θ.Ι.

$$\ddot{x} + a\sin x = 0 \quad , a>0 \quad , a = \frac{l}{m}$$

2 σημεία ισορροπίας, $(0,0)$, $(\pi,0)$ στην πρώτη περιστροφή $(n\pi, 0)$, $n=0,1,2,\dots$ είναι αυτόνομη ΔΕ.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -a\sin x \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{-a\sin x}{y} \Longleftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-a\sin x}{y} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow y\,dy + a\sin x\,dx = 0 \Longleftrightarrow \frac{y^2}{2} - a\cos x = C$$

Οι σταθερές λύσεις προκύπτουν:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \dot{x} = y = 0 \\ \dot{y} = \ddot{x} = -a\sin x = 0 \end{cases}$$

Παρατήρηση: (χώρος φάσεων)

(α) Τα ΣΙ βρίσκονται στον άξονα των x

(β) Για τα ευσταθή ΣΙ έχουμε κλειστές καμπύλες που ανήκουν σε περιοδικές τροχιές.

Εγκυκλοπαιδικά

Fourier : $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A e^{int}$

↓

κρατάω μόνο τις αρμονικές

Μορφοκλασματικό → fractal

Από ένα σύνολο → καταλήγεις σε σημεία (Cantor)

0 —— 1

λόγω της συνέχειας όσο και να το διαιρέσω σε μικρότερα σύνολα πάντα θα υπάρχουν άπειρα σημεία ενδιάμεσα. Δεν μπορεί όμως να έχει το ίδιο μέτρο με αρχικά, αλλά αυτό που μηδενίζω → κάτι ενδιάμεσο.

Τρίτες ρίζες της μονάδας (σύνολο Μαντελμπροτ)

$z^3 + 1 = 0$

Παράδειγμα Να σχεδιάσετε το διάγραμμα φάσεων της εξίσωσης:

$$\ddot{x} = x^3 - x$$

επιτάχυνση με κάποια μη γραμμική δύναμη

Λύση

$\ddot{x} = x^3 - x$: ΣΔΕ 2ης τάξης, μη γραμμική, ομογενής.

Ολοκληρώνω:

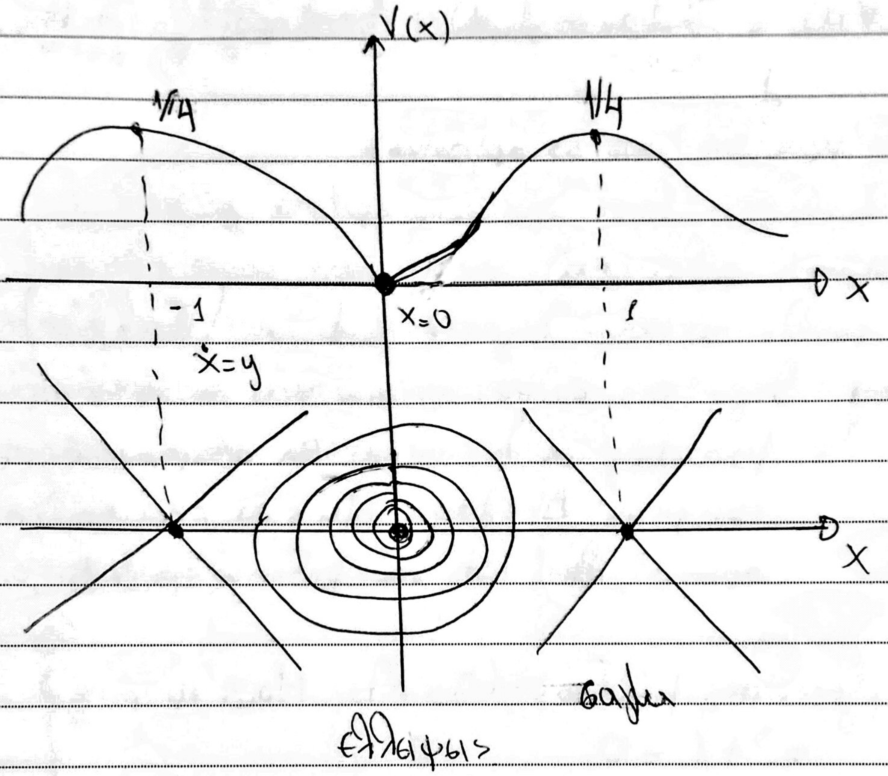
$$\frac{1}{2}(\dot{x})^2 = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + E \iff \underbrace{(\dot{x})^2}_{T(x)} + \underbrace{\left(-\frac{1}{2}x^4 + x^2\right)}_{V(x)} = E$$

Για να βρούμε τα Σ.Ι. : $f(x) = 0 \iff x^3 - x = 0 \iff$

$x(x^2 - 1) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$ → Είναι ΣΙ άρα κινητική $= 0$

$x=0$, $V(x)\Big|_{x=0} = 0$

$x=\pm 1$, $V(x)\Big|_{x=\pm 1} = 1/4$



Άσκηση 1

Λύστε τη Δ.Ε. $\ddot{x} = x^3 - x$
και βρείτε τη γενική λύση (μη γραφική)

Άσκηση 2

Να βρεθούν τα όρια της κίνησης ενός Υ.Σ. που εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω από την επιφάνεια της Γης με ταχύτητα V_0.
(Εφαρμόστε: $\bar{F} = -G\,\frac{Mm}{r^2}\,\bar{r}_0$)

Πότε το Υ.Σ. αυτό θα μπορέσει να ξεφύγει από την έλξη της Γης;
(ταχύτητα διαφυγής = ;)